



Pesquisa e Educação na Contemporaneidade: Perspectivas Teórico-Methodológicas  
Caruaru, 13 e 14 de setembro de 2012

Eixo Temático 03 – Currículo, Ensino, Aprendizagem e Avaliação

## **AMOR, ROMA, MORA: O RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO NOS LIVROS DIDÁTICOS DO 2º AO 5º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL**

**Adryanne Barreto de Assis – UFPE**

**Sthenio Magalhães – UFPE**

### **RESUMO**

O presente estudo analisou como os livros didáticos de Matemática do 2º ao 5º ano do ensino fundamental, aprovados pelo Plano Nacional do Livro Didático (PNLD) de 2010, trabalham o raciocínio combinatório, realizando um estudo comparativo com os achados de Barreto, Amaral & Borba (2007). Examinou-se o tratamento dado pelos autores ao abordar esse conceito levando em consideração duas dimensões conceituais propostas por Vergnaud (1986): significados e representações (apresentadas e sugeridas). Foi constatado que houve uma diminuição no quantitativo geral dos problemas que envolvem raciocínio combinatório do estudo dos livros do PNLD de 2007 para os de 2010; dentre as representações simbólicas abordadas, o *desenho* se destacou quanto às apresentadas e questões *com apenas o enunciado* como sugeridas. Contudo, não houve diferença significativa entre as representações simbólicas do estudo anterior e do atual.

**Palavras-chave: Raciocínio Combinatório. Livros Didáticos. Anos iniciais de escolarização.**

### **1 APRESENTAÇÃO**

A qualidade do conteúdo nos livros didáticos de Matemática tem sido tema amplamente discutido por pesquisas na área da Educação Matemática, uma vez que em muitos contextos sociais o livro didático ainda é o principal guia das ações pedagógicas na sala de aula.

Estudos como os de Oliveira & Garnica (2006), Araujo & Teles (2010) e Gomes & Gitirana (2011) ajudam a entender como está configurada a prática da análise dos livros didáticos de Matemática numa perspectiva heterogênea. Nestes trabalhos são

discutidas as abordagens de conceitos específicos utilizadas nos livros didáticos e propostas metodológicas que podem guiar o processo analítico.

O raciocínio combinatório, em específico, interessa a esta pesquisa por ser um campo da educação matemática muito próximo de situações cotidianas dos aprendizes, possibilitando a convergência desses saberes para contextos reais.

Barreto, Amaral & Borba (2007) buscaram observar como são tratados os problemas de raciocínio combinatório em cinco coleções de livros didáticos do Ensino Fundamental e seus respectivos manuais do professor aprovados pelo PNLD de 2007. No intuito de realizar um estudo comparativo que permita estabelecer um panorama geral da evolução no tratamento da análise combinatória pelos livros didáticos, procurou-se como objetivo geral analisar a abordagem dos problemas de raciocínio combinatório em duas coleções de livros didáticos de Matemática aprovados pelo PNLD de 2010 que, por sua vez, também compunham a amostra da pesquisa supracitada.

## **2 DUAS SAIAS E TRÊS BLUSAS: DISCUTINDO O RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO**

A Combinatória é uma área da Matemática que faz parte do raciocínio multiplicativo. Essa área da Matemática é trabalhada mais especificamente no Ensino Médio, apesar das indicações dos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997) apontarem a necessidade de serem trabalhados desde os anos iniciais da escolaridade os problemas que envolvem combinações, arranjos, permutações e o princípio multiplicativo da contagem.

Vergnaud (1982) toma como premissa que o conhecimento está organizado em campos conceituais cujo domínio, por parte do sujeito, ocorre ao longo de um largo período de tempo, através de experiência, maturidade e aprendizagem. Portanto, se faz importante o ensino dos diferentes tipos de problemas combinatórios durante os primeiros anos do Ensino Fundamental até o Ensino Médio.

De acordo com Pessoa & Borba (2009), “no campo conceitual das estruturas multiplicativas, assim como em todo campo conceitual, o aluno não constrói um conceito em torno de um problema, mas constrói um campo de conceitos que lhes dão sentido num campo de problemas” (p. 57). Isso se confirma baseado nos estudos de

Vergnaud (1986), sobre a Teoria dos Campos Conceituais, ao verificar que os conceitos se inter-relacionam e a relação entre os conceitos deve ser confirmada. Sendo assim, trabalhar com variados problemas combinatórios ratifica que estes fazem parte de um mesmo campo conceitual, ou seja, estão articulados entre si.

Vergnaud (1986) distingue três dimensões fundamentais para cada conceito: (i) o conjunto de situações que dão sentido ao conceito (S); (ii) as relações e propriedades *invariantes* (I); e (iii) o conjunto das *representações simbólicas* utilizadas para resolução do problema – desenhos, tabelas, árvores de possibilidades (R). Essas dimensões devem ser consideradas no aprendizado de todo conceito.

Uma vez que o ensino de problemas combinatórios é recomendado pelos PCN (BRASIL, 1997), houve a inclusão dos mesmos em livros didáticos, aumentando, assim, o número de atividades de Combinatória. Contudo, não há necessariamente uma explicitação quanto às dimensões existentes em um conceito: significados, invariantes e representações simbólicas.

Deste modo, para modificar antigas perspectivas de ensino, a fim que os problemas combinatórios sejam compreendidos mais facilmente pelos alunos, é importante que o professor viabilize o estudo dos variados tipos de problema e tenha uma visão de conceitos interligados em campos.

### **3 LIVROS DIDÁTICOS E O ENSINO DE MATEMÁTICA**

O livro didático contribui para o processo de ensino e aprendizagem e, por isso, é necessário fazer uma análise cuidadosa desse instrumento, uma vez que, em dados contextos, é o único suporte didático oferecido ao professor.

Biehl & Bayer (2009) afirmam que o livro didático é um recurso que facilita o planejamento diário do professor, auxilia no tempo da aula e motiva o aprendizado do aluno por meio de exercícios e textos. No entanto, Araujo & Teles (2010) destacam que este não deve ser o único material didático a fazer parte do cotidiano nas salas de aula, ressaltando uma mudança de paradigmas que comumente atribuem ao livro didático uma função estritamente transmissora de conhecimentos, neutra e direta, sem considerar contextos. As autoras afirmam que atualmente a produção dos livros tem se preocupado em contemplar diversas funções, ampliando as abordagens didáticas e cuidando da qualidade do material disponibilizado.

Diante da importância do livro didático no contexto escolar, Barreto, Amaral & Borba (2007) defendem que é relevante analisar como é desenvolvido o trabalho do raciocínio combinatório nos livros didáticos de Matemática para estabelecer uma relação crítica com esses instrumentos.

Nesse sentido, as autoras realizaram um estudo que teve como objetivo analisar como algumas coleções de livros didáticos de Matemática das quatro séries iniciais do ensino fundamental trabalhavam a classe de problemas multiplicativos que envolvem o raciocínio combinatório. Para tal, selecionaram cinco coleções aprovadas pelo PNLD de 2007, de modo a perceber no livro do aluno e no manual do professor o tratamento dado aos problemas que envolvem o raciocínio combinatório, a compreensão das propriedades envolvidas nesses problemas e as representações simbólicas trabalhadas.

Em suas considerações, verificaram que o significado que apresentou maior quantidade de problemas foi Combinação, seguido de Produto Cartesiano, Combinação e, com menor percentual de ocorrência, Arranjo. As autoras indicaram haver uma boa variação das representações simbólicas, tanto no que diz respeito às representações apresentadas, quanto às sugeridas pelos autores, entretanto, nenhuma das coleções trabalhou as propriedades invariantes da combinatória nem orientou o professor sobre os quatro significados do raciocínio combinatório.

Este estudo intencionou utilizar a pesquisa de Barreto, Amaral & Borba (2007) para empreender um estudo comparativo, de modo a reunir elementos que possam contribuir com a Educação Matemática no que diz respeito às discussões que tratam da interface entre raciocínio combinatório e livros didáticos.

#### **4 MÉTODO**

Esta pesquisa teve como objetivo analisar como os livros didáticos do 2º ao 5º ano de Matemática, aprovados pelo Plano Nacional do Livro Didático (PNLD) de 2010, abordam o raciocínio combinatório, realizando um estudo comparativo com os achados de Barreto, Amaral & Borba (2007). Deste modo, buscamos verificar a frequência dos tipos de problemas combinatórios nos diferentes anos e coleções; identificar as formas de representação apresentadas e sugeridas pelos autores nos problemas que envolvem o raciocínio combinatório; e realizar uma comparação dos dados encontrados com as considerações do estudo supracitado.

Para tal, foram selecionadas as seguintes coleções: *Projeto Conviver*, da editora Moderna, que têm como autores Luiz Márcio Imenes, Marcelo Cestari Terra Lellis e Estela D’Alva Milani; e *Aprendendo Sempre*, da editora Ática, que tem como autor Luiz Roberto Dante. Essas coleções também fizeram parte do *corpus* da pesquisa de Barreto, Amaral & Borba (2007) e, no intuito de garantir o direito ao anonimato, foram aqui denominadas aleatoriamente de A e B, portanto, a discussão dos dados não segue, necessariamente, a ordem da apresentação acima.

Cada livro didático foi analisado com foco nos quatro tipos de problemas que envolvem o raciocínio combinatório (produto cartesiano, permutação, arranjo e combinação) e nas suas representações simbólicas apresentadas e/ou sugeridas (tabelas, desenhos, árvore de possibilidade, etc.). Os dados foram tratados com a ajuda do software *Statistical Package for the Social Sciences – SPSS*, “que permite o gerenciamento e a análise estatística de dados em ambiente gráfico” (CAZORLA, 2007, p. 4).

## 5 ANÁLISE DOS RESULTADOS

Os dados encontrados evidenciam que nos livros das coleções analisadas há um aumento no quantitativo de problemas combinatórios conforme o ano de ensino avança. Os livros do 2º ano concentraram 20 problemas que envolvem o raciocínio combinatório, enquanto os livros do 5º ano apresentaram uma maior frequência de problemas combinatórios, 29 no total.

Por meio de uma ANOVA (análise de variância) realizada no SPSS, verificou-se que não houve diferença significativa dos tipos de problema encontrados nos livros das coleções analisadas ( $t(3) = 0,353$ ;  $p = 0,787$ ). Os testes post-hoc realizados não indicaram haver diferenças significativas entre os tipos de problemas combinatórios (em nível  $p = 1,000$ ), ou seja, a ocorrência de um tipo de problema não se sobressai aos demais nos diferentes anos de ensino. A tabela 01 demonstra a distribuição das significâncias entre os tipos de problema combinatório.

**TABELA 01 – DISTRIBUIÇÃO DE SIGNIFICÂNCIAS ENTRE OS TIPOS DE PROBLEMA**

Tipos de problema	Significância*/Tipos de problema			
	Produto Cartesiano	Permutação	Arranjo	Combinação

<b>Produto Cartesiano</b>	-	1,000	0,923	0,809
<b>Permutação</b>	1,000	-	0,957	0,901
<b>Arranjo</b>	0,923	0,957	-	0,995
<b>Combinação</b>	0,809	0,901	0,995	-

\* Foi considerado significante  $p$  inferior ou igual a 0,05.

Também foi observado que a coleção B apresenta um maior número de problemas que envolvem o raciocínio combinatório do que a coleção A, sendo a maior parte desses o Produto Cartesiano (tabela 02). Na coleção A predominam os problemas que envolvem Arranjo. De modo geral, considerando as duas coleções, percebemos que há uma maior concentração de problemas que trabalham o Produto Cartesiano (um total de 37), permitindo estabelecer interlocuções com os estudos de Pessoa & Borba (2007), que evidenciam um melhor desempenho dos alunos dos anos iniciais na resolução desse significado. A Permutação possui uma menor distribuição entre os problemas encontrados (apenas 10), o que pode estar relacionado com o fato de ser o significado de maior dificuldade para os alunos dos anos iniciais, como apontado no estudo de intervenção realizado por Azevedo, Costa & Borba (2011).

**TABELA 02 – DISTRIBUIÇÃO DOS TIPOS DE PROBLEMA POR ANO E COLEÇÃO**

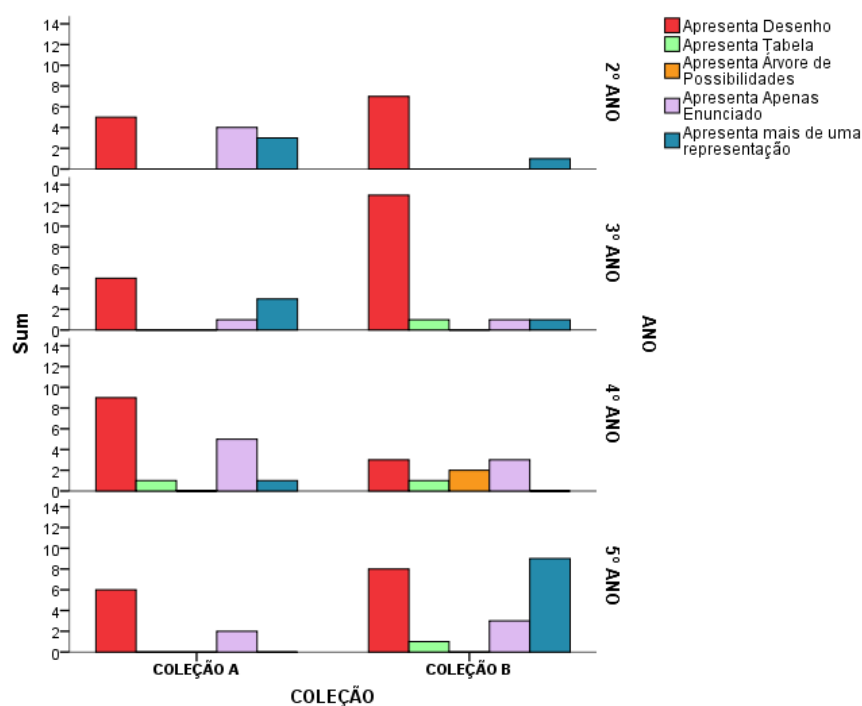
	Produto Cartesiano	Permutação	Arranjo	Combinação	Total por ano	Total por coleção
Coleção A						
<b>2º ano</b>	01	-	09	02	12	45
<b>3º ano</b>	02	04	02	01	09	
<b>4º ano</b>	06	01	05	04	16	
<b>5º ano</b>	03	-	03	02	08	
Coleção B						
<b>2º ano</b>	04	-	-	04	08	54
<b>3º ano</b>	11	-	01	04	16	
<b>4º ano</b>	04	01	00	04	09	
<b>5º ano</b>	06	04	06	05	21	

Ao relacionarmos estes dados com os encontrados por Barreto, Amaral & Borba (2007), percebemos que houve uma diminuição no quantitativo geral dos problemas que envolvem raciocínio combinatório – de 124 para 99. Nos dois casos, a maior parte dos problemas encontrados se referia a Produtos Cartesianos, porém, na pesquisa supracitada, o significado com menor incidência foi o de Arranjo.

Nos livros do PNLD 2010 identificamos as seguintes representações: desenho, tabela, árvore de possibilidades e somente enunciado.

No que tange às representações simbólicas apresentadas nas questões que envolvem o raciocínio combinatório, os livros didáticos da Coleção B concentraram uma maior variedade do que os livros da coleção A (ver figura 01). O desenho se destaca enquanto representação apresentada com maior número de casos em todos os tipos de problema analisados (56 no total), em contraponto à árvore de possibilidades, representação que reuniu apenas 02 casos entre os significados. Ao comparar as informações com as obtidas no estudo de Barreto, Amaral & Borba, percebe-se que os dados coincidem quanto às representações com maior e menor frequência.

**FIGURA 01 – REPRESENTAÇÕES APRESENTADAS**



Ao executar o teste t-student para calcular a diferença de médias entre os tipos de problema e as representações apresentadas (tabela 03), verificou-se que é significativa a presença de tabela ( $p= 0,001$ ), árvore de possibilidades ( $p= 0,001$ ) ou mais de uma representação ( $p= 0,002$ ) nos problemas de Produto Cartesiano. Esses achados estão alinhados com o estudo de Pessoa & Borba (2007) e, em certa medida, avançam nas suas considerações, uma vez que identificam nos problemas de Produto

Cartesiano uma maior variedade de representações apresentadas, que pode influenciar na facilidade de resolução identificada neste tipo de problema.

**TABELA 03 – DISTRIBUIÇÃO DE SIGNIFICÂNCIAS ENTRE AS REPRESENTAÇÕES APRESENTADAS**

Tipos de problema	Significância*/ Representação apresentada				
	Desenho	Tabela	Árvore de Possibilidades	Apenas enunciado	Mais de uma
<b>Produto Cartesiano</b>	0,14	0,001	0,001	0,002	0,002
<b>Permutação</b>	0,001	0,83	0,20	0,83	0,103
<b>Arranjo</b>	0,001	0,001	0,001	0,306	0,210
<b>Combinação</b>	0,001	0,001	0,001	0,239	0,171

\* Foi considerado significante  $p$  inferior ou igual a 0,05.

Este mesmo teste indica que é significativa a presença de desenho ( $p= 0,001$ ), tabela ( $p= 0,001$ ) ou árvore de possibilidades ( $p= 0,001$ ) como representação apresentada nos problemas de Arranjo e Combinação. Já nos problemas de Permutação, apenas a presença de desenho é significativa como representação apresentada nas atividades analisadas ( $p= 0,001$ ). Este dado complementa as considerações da pesquisa de Azevedo, Costa & Borba (2011), uma vez que a pouca variedade de representações pode colaborar com as dificuldades encontradas pelos estudantes na resolução deste tipo de problema.

Com relação às representações sugeridas pelos autores nas questões que envolvem a combinatória, percebeu-se, por meio do cálculo de distribuição de frequências cruzadas, que a maior parte dos problemas apresenta apenas o enunciado, sem recomendar nenhum tipo de representação (tabela 04), coincidindo com os dados encontrados por Barreto, Amaral & Borba (2007). Esta ausência daria aos alunos a liberdade de escolher a representação que mais lhe convier para a resolução do problema, como afirmam as autoras do estudo anterior.

**TABELA 04 – DISTRIBUIÇÃO DAS REPRESENTAÇÕES SUGERIDAS POR TIPO DE PROBLEMA**



Tipos de problema	Representação sugerida						
	Desenho	Tabela	Árvore de Possibilidades	Apenas enunciado	Material Manipulativo	PFC	Mais de uma
<b>Produto Cartesiano</b>	04	02	03	19	04	04	05
<b>Permutação</b>	02	02	02	02	-	-	02
<b>Arranjo</b>	08	03	03	10	01	-	02
<b>Combinação</b>	02	05	04	15	-	-	-
<b>Total</b>	16	12	12	46	05	04	09

A sugestão de utilizar o princípio fundamental da contagem (PFC) para a resolução dos problemas de combinatória foi a menos utilizada nos livros analisados, presente em apenas 04 questões. Contudo, no estudo das referidas autoras a menor parte dos problemas que envolviam o raciocínio combinatório sugeriam mais de uma forma de representação.

É importante destacar que o princípio fundamental da contagem foi utilizado apenas em problemas de Produto Cartesiano, o que nos leva a inferir que este tipo de representação pode estar sendo utilizado equivocadamente, confundido, muitas vezes, como sendo o próprio Produto Cartesiano.

Calculando a diferença de médias entre as edições do PNLD 2007 e 2010 da coleção A, verificou-se que houve uma diferença significativa apenas nos problemas que envolviam combinação ( $t(4,427) = 6; p = 0,004$ ). De fato, o número de problemas que envolviam este significado caiu de 23 casos na edição de 2007 para 09 na edição de 2010. Os outros tipos de problema não apresentaram diferenças significativas entre as edições, apresentando grau de significância da ordem  $p > 0,036$ . Estudos na área das ciências humanas consideram significante  $p$  igual ou inferior a 0,05.

O mesmo cálculo demonstra não haver diferença significativa entre os tipos de problema nas edições do PNLD 2007 e 2010 da coleção B, uma vez que resultam em grau de significância  $p > 0,105$ . Esse dado sinaliza certa regularidade na apresentação dos diferentes significados do raciocínio combinatório no intervalo das edições aprovadas nos diferentes PNLD's.

Ao realizar a mesma comparação considerando as representações simbólicas, percebeu-se não haver diferenças significativas entre a edição das coleções analisadas por Barreto, Amaral & Borba (2007) e a utilizada por este estudo (tabela 05). O número de representações apresentadas e sugeridas demonstra manter-se estável, sem alterações expressivas no intervalo dos PNLD's de 2007 e 2010.

**TABELA 05 – DISTRIBUIÇÃO DE SIGNIFICÂNCIAS DAS REPRESENTAÇÕES COMPARANDO AS EDIÇÕES DO PNLD 2007 E 2010**

REPRESENTAÇÕES APRESENTADAS	Significância*	
	COLEÇÃO A	COLEÇÃO B
<b>Desenho</b>	0,802	0,332
<b>Tabela</b>	0,390	0,305
<b>Apenas enunciado</b>	0,675	0,176
<b>Outros</b>	0,483	0,444
REPRESENTAÇÕES SUGERIDAS		
<b>Desenho</b>	0,905	0,305
<b>Tabela</b>	1,000	1,000
<b>Apenas enunciado sem sugestão</b>	0,462	0,193
<b>Outros</b>	0,253	0,606

\* Foi considerado significante  $p$  inferior ou igual a 0,05.

## 6 CONSIDERAÇÕES

Este artigo intencionou realizar um estudo comparativo com a pesquisa de Barreto, Amaral & Borba (2007) objetivando analisar como os livros didáticos do 2º ao 5º ano de Matemática, aprovados pelo PNLD de 2010, abordam o raciocínio combinatório.

Os resultados sugerem que, nos livros das coleções aprovadas pelo PNLD 2010, não houve diferença significativa da frequência entre os quatro tipos de problema que envolvem o raciocínio combinatório, evidenciando uma distribuição equânime entre os significados. Em complemento, observou-se que há um aumento no quantitativo de problemas combinatórios conforme o ano de ensino avança.

O Produto Cartesiano foi o significado que apresentou maior frequência entre os tipos de problema encontrados nas duas coleções analisadas, contrário à Permutação,

que reuniu o menor número, corroborando com as sugestões de pesquisas que evidenciam as dificuldades encontradas pelos alunos na sua resolução.

Em contrapartida, entre as edições de 2007 e 2010 das coleções analisadas verificou-se a diminuição de 124 para 99 o número total de problemas combinatórios encontrados, números que ressaltam a perda de espaço nos livros didáticos imposta a este campo do conhecimento matemático no intervalo dos PNLD's correspondentes.

As representações apresentadas nos problemas com maior e menor frequência permaneceram as mesmas nos dois estudos – desenho e árvore de possibilidades, respectivamente. A presença apenas do enunciado, sem sugestão de representação para a resolução da questão, também foi maioria nas duas pesquisas, indicando uma tendência a deixar os alunos livres para responderem as questões com a representação que lhes convenha.

Este estudo comparativo nos deu subsídios para avançar nas discussões sobre a abordagem do raciocínio combinatório nos livros didáticos de Matemática do Ensino Fundamental. Perceber aproximações e distanciamentos entre as coleções de livros didáticos, considerando o intervalo do PNLD de 2007 e 2010, possibilitou vislumbrar de maneira mais sistemática um fragmento de como o raciocínio combinatório está sendo apresentado nas escolas, oferecendo elementos que podem contribuir para a melhoria da qualidade da educação matemática oferecida no Brasil.

## 7 REFERÊNCIAS

ARAUJO, Julia; TELES, Rosinalda. **Área do retângulo em contextos do cotidiano: um estudo sobre variáveis relacionadas aos campos conceituais das grandezas, da geometria e numérico na matemática escolar.** Caderno de Trabalhos de Conclusão do Curso de Pedagogia (UFPE), p. 1-26, 2010.

AZEVEDO, Juliana; COSTA, Débora; BORBA, Rute. **O impacto do software Árbol no raciocínio combinatório.** Anais da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática – CIAEM. Recife, Brasil, 2011.

BARRETO, Fernanda; AMARAL, Fátima; BORBA, Rute. **Como o Raciocínio Combinatório tem sido apresentado em livros didáticos de séries iniciais.** Caderno de Trabalhos de Conclusão do Curso de Pedagogia (UFPE), v. 2, p. 1-21, 2007.

BIEHL, Juliana Volcanoglo; BAYER, Arno. **A escolha do livro didático de matemática.** In: Anais do X Encontro Gaúcho de Educação Matemática. Canoas, RS: EGEM, 2009.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretária de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática (1º ao 5º ano)**. Brasília, DF, 1997.

CAZORLA, Irene Mauricio. **Workshop de softwares estatísticos para pesquisa em educação matemática**. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, SP: 2007.

GOMES, Tâmara; GITIRANA, Verônica . **Grandezas numéricas em questões de raciocínio combinatório do 6º ao 9º ano**. In: Anais da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática – CIAEM. Recife, PE: 2011.

OLIVEIRA, Fábio; GARNICA, Antonio. **Análise de Livros Didáticos de Matemática: um enfoque hermenêutico**. In: Anais do X EBRAPEM - Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática. Belo Horizonte, MG: Faculdade de Educação da UFMG, 2006.

PESSOA, Cristiane; BORBA, Rute. **Estratégias de resolução de problemas de raciocínio combinatório por alunos de 1ª à 4ª série**. In: Anais do VII Encontro Nacional de Educação Matemática, 2007.

PESSOA, Cristiane; BORBA, Rute. Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª à 4ª serie. **Zetetike**. v.17, n.31, jan. – jun., 2009.

VERGNAUD, Gérard. A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. In: CARPENTER, Thomas; MOSER, Joseph; ROMBERG, Thomas (eds.). **Addition and subtraction: a cognitive perspective**. Hillsdale, N. J.: Lawrence Erlbaum, 1982.

\_\_\_\_\_. Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didáctica das matemáticas. Um exemplo: as estruturas aditivas. *Análise Psicologia*, 1 (5), 76-90, 1986.