IV EPEPE ENCONTRO DE PESQUISA EDUCACIONAL EM PERNAMBUCO
Pesquisa e Educação na Contemporaneidade: Perspectivas Teórico-Metodológicas
Caruaru, 13 e 14 de setembro de 2012

Eixo Temático: 3- Currículo, Ensino, Aprendizagem e Avaliação.

ENSINANDO COMBINATÓRIA EM UMA TURMA DO 5º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Laís Thalita Bezerra dos Santos, UFPE
Cristiane Azevêdo dos Santos Pessoa, UFPE

RESUMO

O presente estudo analisou como intervenções baseadas em *invariantes*, *listagem de possibilidades*, *sistematização* e *generalização* podem facilitar a compreensão de alunos de 5º ano do Ensino Fundamental acerca de problemas combinatórios. Foram realizados pré-teste, intervenções e pós-teste e comparados os desempenhos, observando as contribuições das intervenções. A estratégia da *listagem* foi observada como importante para o ensino, após ter sido detectada em estudos de sondagem anteriores como caminho utilizado por alunos de diferentes níveis escolares. Os demais pilares (*invariantes, sistematização* e *generalização),* apesar de aparecerem com menor frequência nos estudos de sondagem, são entendidos como facilitadores da compreensão combinatória, por isso o destaque para os mesmos durante as intervenções. Os alunos de modo geral demonstraram que compreenderam os pilares que foram trabalhados, mostrando-se capazes de resolver aos problemas e generalizar seus procedimentos.

Palavras chave: Raciocínio Combinatório, Intervenções, Tipos de Problemas Combinatórios.

1. Introdução

Estudo desenvolvido por Pessoa e Borba (2009a) apresenta como um dos seus resultados as estratégias desenvolvidas por 568 alunos do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio ao resolverem problemas de Combinatória (Arranjo, Combinação, Permutação e Produto Cartesiano). Estas estratégias eram, por vezes, bem sucedidas em encontrar soluções corretas e, em outras ocasiões, iniciavam-se corretamente, mas não eram totalmente bem sucedidas em se chegar ao resultado final correto.

Um estudo desenvolvido por Pessoa e Santos (2011) também encontrou estratégias de alunos ao resolverem problemas combinatórios. Nestes estudos as autoras levantaram, além das estratégias, as explicações dos alunos pesquisados sobre o entendimento que os mesmos tiveram no que se refere a cada problema combinatório, sendo possível verificar quais as dificuldades/facilidades dos alunos em relação aos invariantes de cada situação.

Hipóteses levantadas por alunos de diferentes anos escolares para resolverem situações-problema, assim como a explicitação dessas hipóteses através de suas estratégias, devem ser vistas pela escola como uma oportunidade de perceber como os alunos pensam sobre determinados conceitos e utilizá-las pode ser uma boa alternativa para o ensino.

No estudo atual objetiva-se utilizar a estratégia que mais se destacou em todos os estudos analisados, que foi a listagem de possibilidades, juntamente com três outros pilares considerados fundamentais para a aprendizagem da Combinatória, que são o destaque para os invariantes de cada tipo de problema combinatório, a sistematização e a generalização. Tais pilares foram tomados como ponto de partida para a elaboração e execução de intervenções que possam auxiliar no ensino-aprendizagem da Combinatória com alunos do 5º ano do Ensino Fundamental, a fim de analisar os esperados avanços e as contribuições de tais intervenções no que se refere à compreensão da Combinatória.

2. A Combinatória

De acordo com Pessoa e Borba (2009b), a combinatória nos permite quantificar conjuntos ou subconjuntos de objetos ou de situações, selecionados a partir de um conjunto dado, ou seja, a partir de determinadas estratégias pode-se saber quantos elementos ou quantos eventos são possíveis numa dada situação, sem necessariamente ter que contá-los um a um. Assim, no presente estudo, entende-se o *raciocínio combinatório* como um tipo de pensamento que envolve contagem, mas que vai além da enumeração de elementos de um conjunto. Na combinatória contam-se, baseando-se no raciocínio multiplicativo, grupos de possibilidades, através de uma ação sistemática, seja pelo uso de fórmula, seja pelo desenvolvimento de outra estratégia que dê conta de atender aos requisitos desses tipos de problemas, como a constituição de agrupamentos, a determinação de possibilidades e sua contagem.

Pessoa e Borba (2009a) classificam os problemas que envolvem o raciocínio combinatório em uma organização única – não identificada em estudos anteriores. A seguir estão colocados os tipos de problemas, ou seja, significados presentes na Combinatória (Produto Cartesiano, Arranjo, Permutação e Combinação) e seus respectivos *invariantes do conceito*, ou seja, relações e propriedades que se mantêm constantes:

Produto Cartesiano (1) Dados dois (*ou mais*) conjuntos distintos, os mesmos serão combinados para formar um novo conjunto; (2) A natureza dos conjuntos é distinta do novo conjunto formado. O que caracteriza estes problemas é que dois ou mais conjuntos distintos são combinados para formarem um terceiro conjunto.

Permutação (1) Todos os elementos do conjunto serão usados, cada um apenas uma vez (especificamente para os casos sem repetição); (2) A ordem dos elementos gera novas possibilidades. O que caracteriza esses problemas é que todos os elementos são usados em diferentes ordens para formar as Permutações.

Arranjo (1) Tendo **n** elementos, poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos.... **p** elementos, com $\mathbf{0} < \mathbf{p} < \mathbf{n}$, sendo **p** e **n** números naturais; (2) A ordem dos elementos gera novas possibilidades. O que caracteriza esses problemas é que de um grupo maior, alguns subgrupos são organizados e a ordem dos elementos gera novas possibilidades, sendo importante na composição das possibilidades.

Combinação (1) Tendo **n** elementos, poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos.... **p** elementos, com $\mathbf{0} < \mathbf{p} < \mathbf{n}$, **p** e **n** naturais; (2) A ordem dos elementos não gera novas possibilidades. De forma semelhante aos problemas de Arranjo, tem-se um conjunto maior e dele são selecionados elementos para formar subconjuntos, porém, de forma diferente, a ordem dos elementos não gera novas possibilidades.

Apesar da importância de estudos que envolvam o raciocínio combinatório, poucas são as pesquisas que objetivam investigá-lo propondo intervenções de ensino envolvendo uma amplitude de situações combinatórias, como as que envolvem os Arranjos, as Combinações, as Permutações e os Produtos Cartesianos. Como exemplos de estudos anteriores relacionados à Combinatória envolvendo os quatro tipos de problemas, Azevedo, Costa e Borba (2011), em um estudo com o software Árbol, trabalharam os quatro tipos de problemas com 16 crianças do 5º ano e perceberam progressos na compreensão da Combinatória. Outro estudo que trabalhou com intervenção, foi o de Barreto e Borba (2012) que investigou o uso de estratégias específicas (listagem e árvore de possibilidades) com alunos da Educação de Jovens e Adultos. Tanto os alunos que trabalharam com listagem de possibilidades, quanto os que trabalharam com a árvore de possibilidades apresentaram importantes avanços.

Já no que se refere aos estudos que investigaram tipos específicos de problemas, Inhelder e Piaget (1955) estudaram a resolução de problemas de tipo permutação por parte de crianças com idade em torno de 12 anos; Soares e Moro (2006) investigaram a resolução de problemas de Produto Cartesiano por crianças de 5ª e 6ª série (atuais 6º e 7º anos de escolarização); Schliemann (1988), numa investigação com adultos escolarizados e com pouca escolarização, trabalhou com problemas de tipo Permutação; e Miguel e Magina (2003) investigaram com alunos do 1º ano de Licenciatura em Matemática as estratégias de resolução de Permutações simples e com repetição, Arranjos simples e com repetição e Combinações.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN, Brasil, 1997) apontam a necessidade de que a Combinatória seja trabalhada desde os anos iniciais da escolaridade, entretanto, apesar dessa recomendação, na prática de sala de aula, a maioria dos problemas de raciocínio combinatório (Arranjo, Combinação e Permutação) só é introduzida formalmente na escola a partir do 2º ano do Ensino Médio. Apenas o do tipo Produto Cartesiano é trabalhado explicitamente nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Além disso, embora os livros didáticos destinados aos anos iniciais do Ensino Fundamental já tragam diversificados problemas de raciocínio combinatório (como evidenciado por Barreto, Amaral e Borba, 2007), os mesmos não fazem uma distinção desses tipos, ou seja, não há um trabalho sistemático com o raciocínio combinatório antes do 2º ano do Ensino Médio. Além disso, apesar dos livros didáticos apresentarem diversificados problemas que envolvem o raciocínio combinatório, o manual do professor não apresenta uma discussão acerca de tal assunto, ou seja, não há uma orientação sobre como tais conteúdos devem ser trabalhados em sala de aula.

Ainda assim, estudos como o de Pessoa e Borba (2009b) mostram que é possível desenvolver compreensões sobre estes tipos de problemas antes de sua introdução formal na escola e que os alunos são capazes de desenvolver estratégias para resolver problemas combinatórios dos diferentes tipos.

Em relação à resolução de problemas, pode-se pensar nestas como situações que geram conflito e cujas soluções não são óbvias, ou seja, quando um aluno recorre ao conjunto de respostas imediatamente disponível e não obtém sucesso na solução, está frente a um problema. Deve, então, criar uma saída própria. A escolha pode ser por um procedimento mais formal, como as regras e algoritmos que seguem sempre a mesma ordem de passos de solução, ou uma heurística que é menos formal, no sentido de ser adequada a cada situação.

Apesar do elevado número de estudos sobre Estruturas Multiplicativas, justifica-se a realização de pesquisas, como a atual, que investiguem mais aprofundadamente o raciocínio combinatório, desenvolvendo intervenções que possibilitem uma compreensão mais ampla da Combinatória.

3. Objetivos e Método

O presente estudo objetivou experimentar com alunos do 5º ano do Ensino Fundamental intervenções baseadas no destaque dos *invariantes* de cada tipo de problema combinatório, na *listagem de possibilidades* como estratégia de resolução, na *sistematização* e na *generalização*; comparar o desempenho dos alunos, em relação à Combinatória, entre o pré-teste e o pós-teste; e analisar, a partir do desempenho dos alunos no pré-teste e no pós-teste, como a intervenção contribuiu para o desenvolvimento da compreensão da Combinatória.

A princípio, foi feito o levantamento das estratégias bem sucedidas obtidas nos estudos de Pessoa e Borba (2009a) e de Pessoa e Santos (2011), percebendo-se que a estratégia comumente utilizada pelas crianças durante suas resoluções era a *listagem de possibilidades*. Assim, acreditando que o destaque para os *invariantes*[1] de cada tipo de problema combinatório, a *sistematização* e a *generalização* facilitam a compreensão da Combinatória, foi essa a forma de intervenção adotada para ser trabalhada com os alunos de uma turma do 5º ano escolar, sendo esta o Grupo Experimental (GE). Outra turma de 5º ano da mesma escola foi designada para ser o Grupo Controle (GC), com o qual foram trabalhados problemas de raciocínio lógico e problemas multiplicativos de modo geral e não especificamente os combinatórios. A definição de GE e GC foi feita aleatoriamente. Com os dois grupos (GE e GC) foram realizados um pré-teste, duas sessões de intervenção e um pós-teste.

Com o GE, trabalharam-se os quatro tipos de problemas combinatórios estando esses divididos em duas sessões, as quais tiveram, cada uma, duração de, em média, uma hora e trinta minutos, a depender do avanço e entendimento da turma, e foram organizadas como segue:

Na primeira sessão de intervenção foram trabalhados seis problemas, sendo os três primeiros do tipo Produto Cartesiano e os três últimos do tipo Permutação. Na segunda

---

[1] Para Vergnaud (1990), os invariantes são importantes componentes de um conceito. No presente estudo, defende-se que os invariantes do conceito dos problemas combinatórios se relacionam com a *escolha*, ou seja, a utilização ou não de todos os elementos da situação-problema e com a *ordenação*, ou seja, a geração ou não de novas possibilidades, dependendo do tipo do problema.

sessão de intervenção também foram seis problemas, sendo os três primeiros do tipo Combinação e os três últimos de Arranjo. Nas duas intervenções, o primeiro problema de cada um dos tipos resultava em um número menor de possibilidades (grandeza numérica até 10) e o segundo e o terceiro problemas, levavam a um número maior de possibilidades (grandeza numérica até 30).

Em ambas as sessões de intervenção, foram resolvidos os problemas do pré-teste (na organização do teste, os 1º, 2º, 4º e 5º problemas), de modo que fosse possível tirar dúvidas das crianças e destacar os invariantes de cada tipo de problema combinatório que elas já haviam resolvido no momento da aplicação do pré-teste.

Além disso, foi apresentado, de cada um dos problemas combinatórios, um problema ainda não conhecido pelas crianças (3º e 6º problemas), de modo que fosse possível perceber se elas estavam compreendendo o que estava sendo trabalhado. O objetivo era o de que as crianças, após trabalharem os problemas já resolvidos por elas (no pré-teste) e de terem certo entendimento sobre os invariantes, tentassem resolver sozinhas outros problemas do mesmo tipo combinatório (por isso a presença do 3º e 6º problemas).

Os problemas trabalhados no pré-teste, nas sessões de intervenção e no pós-teste foram os seguintes:

Pré-teste:

1)Para a festa de São João da escola temos 2 meninos (Pedro e João) e 3 meninas (Maria, Luíza e Beatriz) que querem dançar quadrilha. Quantos pares diferentes podemos formar, se todos os meninos dançarem com todas as meninas?

2)Para prefeito de uma cidade se candidataram 3 pessoas (Joana, Vitória e Rafael). De quantas formas diferentes poderemos ter o primeiro e o segundo colocado nesta votação?

3)Foi feito um sorteio na festa do dia das crianças da escola. Estão participando Laís, Cecília e Jane. As duas primeiras sorteadas ganharão uma boneca de presente, cada uma. Sabendo que as bonecas são iguais, de quantas formas poderemos ter as duas sorteadas para ganharem as bonecas?

4)Na estante da minha casa há fotos do meu pai, da minha mãe e do meu irmão, sendo um total de 3 porta-retratos. De quantas formas diferentes posso organizar esses porta-retratos de modo que eles fiquem lado a lado?

5)Maria tem 7 blusas (verde, azul, rosa, branca, amarela, lilás e vermelha) e 4 shorts (bege, cinza, marrom e preto) para ir à festa da escola. Quantos conjuntos ela poderá formar, combinando todas as blusas com todos os shorts?

6)A Semifinal da Copa do Mundo será disputada pelas seguintes seleções: África, Brasil, França e Alemanha. De quantas maneiras diferentes podemos ter o primeiro, o segundo e o terceiro colocado nessa disputa?

7)Para a festa de aniversário de Amanda poderão ser convidados cinco amigos entre os sete (Lívia, Cintia, Giselle, Joaquim, Pedro, Allan e Gabriela) que moram na sua rua. Quantos grupos diferentes de cinco amigos Camila poderá formar para ir à sua festa?
8)Elizabete quer criar uma senha para que outras pessoas não mexam no seu celular. Sabendo que ela só pode usar os números 1, 2, 3 e 4, sem repeti-los na mesma senha, de quantas maneiras diferentes Elizabete poderá criar essa senha?

1ª Intervenção:
1) Resolução e discussão - 1º problema do pré-teste (ver pré-teste)
2) Resolução e discussão - 5º problema do pré-teste (ver pré-teste)
3) Novo problema apresentado: A mãe de Pedrinho fez oito tipos de suco (maracujá, laranja, acerola, goiaba, uva, manga, abacaxi e caju) para a comemoração do dia das crianças na escola do seu filho. Ela levou copos descartáveis de quatro cores (amarelo, branco, cinza e preto). Quantas combinações diferentes poderão ser formadas, combinando todos os sucos com todos os copos?
4) Resolução e discussão - 4º problema do pré-teste (ver pré-teste)
5) Resolução e discussão - 8º problema do pré-teste (ver pré-teste)
6) Novo problema apresentado: Mayara foi à sorveteria e pediu um sorvete com quatro bolas: morango, chocolate e flocos e baunilha. Se forem colocadas uma em cima da outra, de quantas maneiras diferentes as bolas de sorvete podem ser colocadas na casquinha?

2ª Intervenção:
1) Resolução e discussão – 3º problema do pré-teste (ver pré-teste)
2) Resolução e discussão – 7º problema do pré-teste (ver pré-teste)
3) Novo problema apresentado: Para brincar no pula pula do parque, podem entrar duas crianças de cada vez. Amanda, Lívia, Gisele, Joaquim, Lorena, Marcos, Pedro e Fabiana estão aguardando para brincar. De quantas maneiras diferentes podem ser formadas as duplas para entrar no pula pula?
4) Resolução e discussão – 2º problema do pré-teste (ver pré-teste)
5) Resolução e discussão – 6º problema do pré-teste (ver pré-teste)
6) Novo problema apresentado: Jane, Neide, Vanessa e Paula estão disputando uma corrida. De quantas maneiras diferentes poderemos ter a primeira, a segunda e a terceira colocada na disputa?

Pós-teste:
1)Juliana é jogadora de tênis e tem quatro raquetes (vermelha, azul, preta e marrom) e duas bolinhas (amarela e verde) para jogar no torneio. Quantas combinações diferentes ela pode formar, combinando todas as raquetes com todas as bolinhas?
2)Raul, Vicente e Artur estão sentados em um sofá de três lugares, sendo que Raul está no primeiro assento, Vicente está no segundo e Artur está no terceiro. Trocando os três meninos de lugar, em quais outras posições diferentes podem sentar Raul, Vicente e Artur?
3)Uma lanchonete tem à disposição cinco variedades de frutas (morango, laranja, pêra, banana e graviola) e pretende misturá-las duas a duas na fabricação de sucos. Quantos serão os tipos de sucos disponíveis?
4)Maurício, Tânia e André formam a comissão de eventos da escola. Eles precisam escolher entre eles um presidente e um vice. De quantas formas diferentes poderemos ter essa escolha?
5)Uma padaria prepara bolos deliciosos. Os bolos podem ser de três tamanhos (pequeno, médio e grande) e os sabores podem ser de oito tipos diferentes (morango, chocolate, brigadeiro, coco, doce de leite, mandioca, laranja e banana). Quantos tipos diferentes de bolo você pode escolher para comprar, combinando cada tamanho com cada sabor?

6)Sem repetir as letras na mesma palavra, quantas palavras diferentes (com ou sem sentido) podemos formar com as letras da palavra GATO?
7)A Professora do 4ª ano elaborou uma prova com seis questões (A, B, C, D, E, F), das quais os alunos deveriam resolver apenas três. De quantas formas eles poderão escolher as três questões?
8)Em um concurso de beleza organizado pelo bairro, quatro meninas (Bruna, Roberta, Helena e Bianca) são as finalistas. De quantas maneiras distintas podemos ter a primeira, a segunda e a terceira colocada?

Trabalhou-se da seguinte forma: foram resolvidos com as crianças (no quadro-negro) o primeiro problema, havendo destaque para os invariantes do mesmo. Após esse momento, pediu-se que elas respondessem, individualmente, ao segundo problema.

Dado o tempo para que as crianças respondessem, era feita a resolução também no quadro, havendo grande participação da turma. O processo foi repetido durante a resolução do terceiro problema. Primeiro as crianças responderam de modo mais individual, e depois ocorreu a resolução em conjunto, no quadro. Tal modo de intervenção ocorreu de forma similar com cada um dos tipos de problemas combinatórios.

A seguir, apresenta-se um exemplo do que foi trabalhado com o GE, destacando-se a listagem de possibilidades, a sistematização, o destaque para os invariantes do tipo de problema trabalhado e a generalização.

Permutação - Problema: *Na estante da minha casa há fotos do meu pai, da minha mãe e do meu irmão, sendo um total de 3 porta-retratos. De quantas formas diferentes posso organizar esses porta-retratos de modo que eles fiquem lado a lado?*

Escrevendo os nomes “pai”, “mãe” e “irmão” no quadro, foi perguntado às crianças quais arrumações eram possíveis. Supondo que estavam no quadro as seguintes possibilidades: “pai, mãe e irmão; mãe, pai e irmão; irmão, mãe e pai”, que eram as comumente apresentadas pelas crianças que já estavam em um nível de compreensão mais desenvolvido, se em comparação com as que citam apenas uma possibilidade, perguntava-se: “Mas só tem essas possibilidades? O porta-retrato do pai só pode vir em primeiro lugar uma vez, que é acompanhado da mãe e do irmão?”, “Será que não tem outras formas de organizar?” Essas questões, de certa forma, enfatizam um dos *invariantes* da Permutação, segundo o qual a ordem dos elementos gera novas possibilidades. Tais perguntas, feitas em um momento de reflexão no qual a maior parte da sala estava envolvida com a resolução dos problemas, fazia com que eles refletissem sobre os mesmos e conseguissem gerar novas possibilidades, as quais eram escritas no quadro.

Ao término do problema, quando já haviam sido escritas todas as possibilidades, era feita a *generalização*, junto com eles. "Quantas possibilidades nós temos nas quais aparecem o pai em primeiro lugar?" Feita a contagem, eles diziam: "duas". Era repetida a pergunta com a mãe e o irmão, levando-os a perceber que para cada elemento, havia duas possibilidades de organização. Assim, a multiplicação 2x3 também resolvia ao problema, sem que fosse necessário escrever todas as possibilidades.

Estando todos os problemas resolvidos, buscou-se também fazer a comparação entre os dois tipos de problemas trabalhados durante a aula, havendo destaque para as semelhanças existentes, e diferenças entre os mesmos.

4. Análise dos Resultados

Para este estudo, foi feito o levantamento acerca dos acertos totais dos alunos, tanto no pré-teste como no pós-teste dos grupos Experimental (GE) e Controle (GC). Em estudos posteriores, pretende-se analisar mais detalhadamente as formas de resoluções encontradas, percebendo possíveis avanços não só na quantidade de acertos, mas também na qualidade das respostas e no nível de compreensão acerca dos problemas Combinatórios.

A seguir, são apresentados os Quadros 1 e 2, que contêm os acertos totais dos alunos no pré-teste e no pós-teste do GE, de modo que seja possível perceber os avanços advindos com os momentos de intervenção.

Quadro 1: Acertos Totais por aluno do Grupo Experimental no Pré-teste

Alunos	**Problemas**								**Total de Acertos**
	PC-[2]	**PC+**	**Arr-**	**Arr+**	**Comb-**	**Comb +**	**Perm-**	**Perm+**	
Aluno 1									0
Aluno 2	X				X				2
Aluno 3	X				X				2
Aluno 4									0
Aluno 5									0
Aluno 6					X				1
Aluno 7									0

[2] PC- = Produto Cartesiano com número menor de possibilidades; PC+ = Produto Cartesiano com número maior de possibilidades; Arr- = Arranjo com número menor de possibilidades; Arr+ = Arranjo com número maior de possibilidades; Comb- = Combinação com número menor de possibilidades; Comb+ = Combinação com número maior de possibilidades; Per- = Permutação com número menor de possibilidades; Perm+ = Permutação com número maior de possibilidades.

Aluno 8									0
Aluno 9									0
Aluno 10	X								1
Aluno 11									0
Aluno 12									0
Aluno 13									0

Quadro 2: Acertos Totais por aluno do Grupo Experimental no Pós-teste

Alunos	**Problemas**								**Total de Acertos**
	PC-	**PC+**	**Arr-**	**Arr+**	**Comb-**	**Comb +**	**Perm-**	**Perm+**	
Aluno 1	X								1
Aluno 2	X		X						2
Aluno 3	X	X	X		X		X		5
Aluno 4		X			X				2
Aluno 5	X	X	X				X		4
Aluno 6					X				1
Aluno 7	X	X	X	X	X		X		6
Aluno 8	X	X	X				X		4
Aluno 9	X	X			X				3
Aluno 10	X	X	X			X	X		5
Aluno 11		X							1
Aluno 12									0
Aluno 13	X	X			X				3

Adiante, nas Tabelas 1 e 2, é realizada a comparação entre os percentuais de acertos no pré-teste e pós-teste do GC e do GE, de modo que seja possível comparar os avanços dos alunos em cada um dos grupos (GE e GC) e verificar se, de fato, a intervenção com problemas combinatórios, utilizando-se estratégias bem sucedidas desenvolvidas por alunos, é válida para a aprendizagem, não sendo suficiente apenas o trabalho com as Estruturas Multiplicativas de um modo geral para a aprendizagem de tais problemas, sendo esta a hipótese inicial.

Tabela 1: Comparação do Percentual de acertos entre o pré-teste e o pós-teste (GE)

	PC-	**PC+**	**Arr-**	**Arr+**	**Comb-**	**Comb+**	**Perm-**	**Perm+**
Pré-teste	23,07	0	0	0	23,07	0	0	0
Pós-teste	69,23	69,23	46,15	7,69	46,15	7,69	38,46	0

Tabela 2: Comparação do Percentual de acertos entre o pré-teste e o pós-teste (GC)

	PC-	**PC+**	**Arr-**	**Arr+**	**Comb-**	**Comb+**	**Perm-**	**Perm+**
Pré-teste	25	6,25	0	0	12,5	0	0	0
Pós-teste	6,25	0	0	0	0	0	6,25	0

A partir dos dados apresentados (mais especificamente Quadros 2 e 3 e Tabela 1), é possível perceber importantes avanços no que se refere ao ensino-aprendizagem de Combinatória quando o conteúdo é trabalhado de forma sistemática em sala de aula, o que demonstra que os pilares adotados, durante as intervenções (listagem de possibilidades como estratégia, sistematização, generalização e percepção dos invariantes dos significados dos problemas), parecem contribuir significativamente para que os alunos compreendam e melhor reflitam sobre a Combinatória. É possível perceber que alunos que antes apresentavam baixos níveis de acertos totais, passaram a solucionar de forma correta os problemas propostos.

Já com os resultados apresentados no GC, pode-se perceber que as intervenções realizadas apenas com Problemas de Estruturas Multiplicativas de um modo geral parecem não ser suficientes para que os alunos compreendam a Combinatória. Nesse grupo, diferentemente do GE, os resultados do pré-teste apresentaram-se melhores do que aqueles encontrados no pós-teste. Hipótese para tal é a de que os alunos, após as intervenções, tenham adotado uma operação (no caso, a adição), para resolver parte dos problemas. Nas intervenções foram utilizadas multiplicações, divisões e, algumas vezes, soma de parcelas repetidas. Grande parte dos alunos adotou, no pós-teste, resolver os problemas através da adição, o que fez com que a maioria chegasse a resultados incorretos, mesmo naqueles problemas que haviam acertado no pré-teste.

Com a análise realizada a partir dos resultados obtidos com o GE, com o qual foram trabalhados problemas de Combinatória especificamente, pode-se perceber os avanços, a seguir:

Neste grupo (GE), foram dez os alunos, dentre os treze, que apresentaram avanços no que se refere à quantidade de acertos totais.

Apenas três alunos (2, 6 e 12), permaneceram com a mesma quantidade de acertos no pré-teste e no pós-teste. Ainda assim, posteriormente, com uma análise mais detalhada acerca das respostas por eles apresentadas espera-se perceber os possíveis avanços no que se refere à compreensão dos problemas para esses três alunos especificamente, tendo em vista que eles podem ter evoluído na percepção mesmo que não tenham, ainda, esgotado todas as possibilidades.

No pré-teste deste grupo (GE), os acertos totais ocorreram no problema de Produto Cartesiano com número menor de possibilidades, respondidos pelos alunos 2, 3 e 10 e no problema de Combinação com número menor de possibilidades, respondidos pelos alunos 2, 3 e 6.

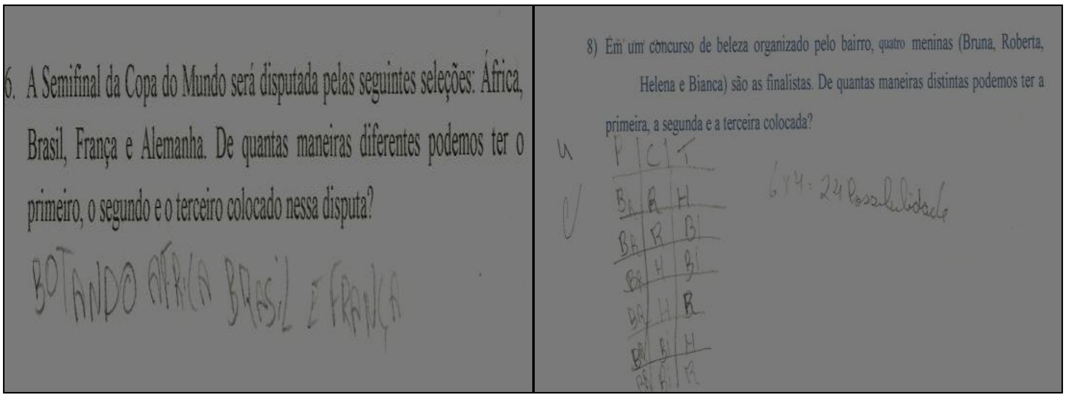
No estudo de Pessoa e Santos (2011), o problema de Combinação foi apresentado como o de mais fácil resolução pelas crianças, seguidos dos problemas de Produto Cartesiano, Permutação e Arranjo. Tal resultado assemelha-se aos previamente encontrados no estudo atual (pré-teste), no qual as crianças aparentam ter mais facilidade para resolver os problemas de Combinação e Produto Cartesiano.

Já no pós-teste (GE), pode-se perceber que houve acertos totais em todos os tipos de Problemas Combinatórios, exceto no de Permutação com número maior de possibilidades. Explicação para tal pode ser encontrada no contexto no qual tal problema estava inserido, que era o anagrama da palavra GATO. Tanto no presente estudo como no de Pessoa e Santos (2011) as crianças demonstraram dificuldades na resolução desse tipo de problema.

No que se refere aos problemas que levavam a um número maior de possibilidades, nos do tipo Produto Cartesiano os alunos avançaram bastante, de zero para 9 resoluções corretas. Já nos problemas de Arranjo e Combinação (com número maior de possibilidades) para cada um dos problemas citados só houve 1 acerto (no pós-teste). É mais difícil generalizar/esgotar as possibilidades com número maior de possibilidades e com problemas menos comuns.

Analisando o processo, destaca-se, como exemplo, o aluno 7, que anteriormente não havia apresentado acertos totais em nenhum dos problemas combinatórios (pré-teste), e após as intervenções (pós-teste) passa a solucionar corretamente 6 dos 8 problemas propostos. Além disso, esse aluno foi o único, dentre os 13 que participam do Estudo, que acertou totalmente o problema de Arranjo com número maior de possibilidades. Destaque também para a generalização feita por ele, nesse problema, sendo esta uma das ênfases das intervenções.

É bastante significativo que um aluno que antes tinha a percepção de que para responder ao problema bastava citar apenas uma possibilidade, passe a solucionar o mesmo tipo de problema a partir da listagem de várias possibilidades e da generalização. Ele demonstra perceber que listando um dos elementos em primeiro lugar são possíveis seis possibilidades diferentes. Assim, sendo quatro o total de elementos, é feita a multiplicação 6x4, tendo por resultado as 24 possibilidades possíveis para o problema, como segue:


6. A Semifinal da Copa do Mundo será disputada pelas seguintes seleções: África, Brasil, França e Alemanha. De quantas maneiras diferentes podemos ter o primeiro, o segundo e o terceiro colocado nessa disputa?

BOTANDO AFRICA BRASIL E FRANÇA

8) Em um concurso de beleza organizado pelo bairro, quatro meninas (Bruna, Roberta, Helena e Bianca) são as finalistas. De quantas maneiras distintas podemos ter a primeira, a segunda e a terceira colocada?

Figura 1: Aluno 7 – desempenho no problema de Arranjo com número maior de possibilidades (pré-teste e pós-teste)

5. Considerações Finais

Os resultados acima discutidos foram bastante satisfatórios e permitem perceber que os alunos, de modo geral, demonstraram em seus procedimentos de resolução que compreenderam os pilares que foram trabalhados.

Além disso, é preciso destacar que mesmo aqueles alunos que não tenham demonstrado esgotar todas as possibilidades em suas resoluções, não apresentando as respostas totalmente corretas quando se analisa em termos quantitativos, podem ter avançado em termos da melhora na qualidade das estratégias, por exemplo, da listagem de uma possibilidade apenas para a percepção de outras possíveis para responder ao problema, ainda que sem a finalização correta, o que demonstra que estão compreendendo de forma mais adequada o conteúdo trabalhado.

Estudos como o atual são importantes porque destacam a necessidade de que um ensino sistemático com a Combinatória seja inserido nos anos iniciais, sendo os alunos de tais anos escolares capazes de, além de criar estratégias próprias de resolução, compreender os invariantes de problemas combinatórios, sistematizar seus procedimentos e, em parte, generalizar os mesmos.

Ele mostra, ainda, que o trabalho com as Estruturas Multiplicativas, apenas, não é suficiente para que tais alunos compreendam a Análise Combinatória. Essa conclusão se baseia no fato de que o GC do presente estudo não apresentou avanços no que se refere à resolução dos problemas Combinatórios.

Tais fatores ratificam a hipótese inicial de que é preciso um trabalho sistemático, com ênfase nos invariantes, estando aqui inclusas as diferenças e semelhanças entre cada um dos problemas Combinatórios, nas possíveis estratégias que podem vir a facilitar as resoluções e na generalização para que os alunos obtenham uma maior compreensão acerca da Análise Combinatória.

Referências

AZEVEDO, Juliana; COSTA, Débora; BORBA, Rute. O impacto do software Árbol no raciocínio combinatório. **Anais da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática.** Recife, 2011.

BARRETO, Fernanda; AMARAL, Fábio & BORBA, Rute. Como o raciocínio combinatório tem sido apresentado em livros didáticos de séries iniciais. **Caderno de Trabalhos de Conclusão de Curso de Pedagogia**, Recife: UFPE, 2007, v. 2, p. 1-21.

BARRETO, Fernanda. & BORBA, Rute. Intervenções de combinatória na educação de jovens e adultos. **Anais da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática.** Recife, 2011.

BRASIL, MEC. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Matemática. 1º e 2º ciclos. Secretaria de Ensino Fundamental, 1997.

INHELDER, Barbara & PIAGET, Jean. **De la logique de l'enfant à la logique se l'adolescent**. Paris: Presses Universitaires de France, 1955.

MIGUEL, Maria. Inez. & MAGINA, Sandra. As estratégias de solução de problemas combinatórios: um estudo exploratório. **Anais do II Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática,** Santos, 2003.

PESSOA, Cristiane & BORBA, Rute. O desenvolvimento do raciocínio combinatório dos anos iniciais aos finais da escolarização básica. In: **Anais do IV Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática** - IV SIPEM, 2009, Taguatinga – DF, 2009a. p. 1-21.

PESSOA, Cristiane. & BORBA, Rute. Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1a a 4a série. **Zetetike** (UNICAMP), v. 17, p. 105-150, 2009b.

PESSOA, Cristiane. & SANTOS, Laís Thalita Bezerra dos. O que fazem alunos do 5º ano de escolarização básica diante de situações combinatórias? **Anais da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática.** Recife, 2011.

SCHLIEMANN, Analúcia. A compreensão da análise combinatória: desenvolvimento, aprendizagem escolar e experiência diária. In: CARRAHER, Terezinha Nunes; CARRAHER, David & SCHLIEMANN, Analúcia. **Na vida dez, na escola zero**. São Paulo: Cortez, 1988.

SOARES, Maria. Teresa. & MORO, Maria Lúcia. Psicogênese do raciocínio combinatório e problemas de produto cartesiano na escola fundamental. **Anais do III Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática.** Águas de Lindóia, SP, 2006.

VERGNAUD, Gérard. La théorie de champs conceptuels. **Recherches en Didactique de Mathématiques**, 1990, vol. 10, n. 2.3, 133-170.