EPEPE IV ENCONTRO DE PESQUISA EDUCACIONAL EM PERNAMBUCO
Pesquisa e Educação na Contemporaneidade: Perspectivas Teórico-Metodológicas
Caruaru, 13 e 14 de setembro de 2012

Eixo Temático 3- Currículo, Ensino, Aprendizagem e Avaliação

INTERVENÇÕES DE COMBINATÓRIA NO 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL COM ENFOQUE NA LISTAGEM, INVARIANTES, ESTRATÉGIAS BEM SUCEDIDAS E GENERALIZAÇÃO

Cristiane Pessoa - UFPE
Monalisa Cardoso Silva - UFPE

RESUMO

Esta pesquisa aborda à análise do ensino de combinatória para o 9º ano do Ensino Fundamental. Foram elaboradas e realizadas intervenções baseadas em estratégias observadas em estudos anteriores, no qual propiciaram soluções corretas e, em outras ocasiões, iniciavam-se corretamente, mas não eram totalmente bem sucedidas em se chegar ao resultado final correto. Para tal, foi adotada uma metodologia de ensino com destaque para quatro tópicos percebidos, a listagem como estratégia, a sistematização da listagem, o enfoque nas propriedades invariantes de cada significado do problema e a generalização, envolvendo os quatro significados da combinatória (arranjo, combinação, permutação e produto cartesiano). Para analisar o desempenho dos alunos, foram aplicados pré-teste, intervenções e pós-teste. Observaram-se avanços em todos os tipos de problemas após as intervenções. O uso da *sistematização* aponta nos resultados, como sendo o caminho de melhor facilidade pelos alunos de se chegar ao resultado dos problemas. Os alunos desenvolveram um raciocínio combinatório eficiente que pode ser trabalhado desde cedo.

Palavras-chave: Intervenções, Raciocínio Combinatório, Estratégias bem Sucedidas, Sistematização.

1. Introdução

De acordo com as orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN, Brasil, 1997), em relação ao *raciocínio combinatório,* no 1º e 2º ciclos é necessário "levar o aluno a lidar com situações-problema que envolvem combinações, arranjos, permutações e, especialmente, o princípio fundamental da contagem" (1997, p. 57) e no o 3º e 4º ciclos, no que se refere aos problemas de contagem, "o objetivo é levar o aluno a lidar com situações que envolvam diferentes tipos de agrupamentos que possibilitem o desenvolvimento do raciocínio combinatório e a compreensão do princípio multiplicativo para a aplicação no cálculo de probabilidades" (1998, p. 52).

Entretanto, apesar das recomendações dos PCN, na prática de sala de aula, a maioria dos problemas de *raciocínio combinatório* (*arranjo, combinação e permutação*) é introduzida formalmente na escola a partir do 2º ano do Ensino Médio. Apenas o do tipo *produto cartesiano* é trabalhado explicitamente nas séries iniciais do Ensino Fundamental.

Para Pessoa e Borba (2009) o raciocínio combinatório é uma forma de pensar que permite que se levantem possibilidades e sejam analisadas as combinações das mesmas, auxiliando na compreensão de conteúdos matemáticos e de outras áreas do conhecimento.

Estudo desenvolvido por Pessoa e Borba (2009) apresenta como um dos seus resultados as estratégias desenvolvidas por 568 alunos do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio ao resolverem problemas de Combinatória (arranjo, combinação, permutação e produto cartesiano). Nesse estudo foram encontradas estratégias bem sucedidas desenvolvidas pelos alunos, do tipo listagem, desenho, entre outras.

Estudo desenvolvido por Pessoa e Santos (2011) também encontrou diversas estratégias de alunos ao resolverem problemas combinatórios, dentre elas, a listagem também predomina. Neste estudo, além de serem levantadas as estratégias de alunos do 5º ano do ensino fundamental, buscou-se através de entrevistas, perceber a compreensão que os mesmo tinham ao resolver cada tipo de problema combinatório.

No presente trabalho foram utilizadas estratégias bem sucedidas, como as desenvolvidas pelos alunos pesquisados em Pessoa e Borba (2009) e em Pessoa e Santos (2011) como ponto de partida para a elaboração e execução de intervenções que possam auxiliar no ensino-aprendizagem da Combinatória com alunos do 9º ano do Ensino Fundamental. Assim, a *listagem de possibilidades* foi a estratégia utilizada para as intervenções e, além dela, mais outros três pilares foram observados como importantes nos estudos acima citados: a *sistematização* da listagem, a explicitação dos *invariantes* e a *generalização*, quando o aluno percebe a regularidade da sua listagem.

2. Fundamentação teórica

2.1. Resolução de problemas

Para Vergnaud (1990) um problema se relaciona a qualquer situação, seja no âmbito escolar ou fora dele, que, na busca de sua solução, traz a necessidade de descobrir relações e de explorá-las, de elaborar hipóteses e verificar essas hipóteses. Ele defende que no caso do conhecimento matemático, o processo de elaboração de relações por ele discutidas assume sentido ao fazer parte de estruturas mais amplas e complexas em momentos evolutivos posteriores (Vergnaud, 1990). Este estabelecimento de relações se torna possível em situações desafiadoras como as propostas em problemas.

A partir da Teoria dos Campos Conceituais, Vergnaud (1990) considera que existem muitos fatores que influenciam na formação e desenvolvimento dos conceitos, que surgem a partir de problemas a resolver. Portanto, é necessário que se ofereçam situações diversas para a resolução de problemas, para que, assim, os alunos possam fazer reflexões, estabelecendo relações e construindo novas aprendizagens.

Para Vergnaud (1990) um conceito é formado por *significados, invariantes e representações simbólicas.* O tipo de problema, em termos de *significado*, é uma variável importante no processo de resolução e compreensão de um conceito, pois, dependendo do problema, o aluno utiliza relações lógicas diferentes, alguns são mais simples e outros mais complexos do ponto de vista do cálculo relacional (Vergnaud, 1991), ou seja, do ponto de vista da compreensão da lógica do problema. A forma de *representar* um problema também reflete a maneira como o aluno o está compreendendo. Assim, o tipo de problema poderá também gerar formas diferentes de *representação*. Por estas razões, é necessário que a escola esteja atenta à necessidade de diversificação das situações para que o aluno possa pensar sobre um determinado conceito a partir de diferentes perspectivas. Os diferentes *invariantes* – relações e propriedades – também interferem na forma de compreensão por parte do aluno, pois se consegue percebê-los, a interpretação de um problema pode ser uma, e, se não há consciência dos invariantes envolvidos no conceito, a maneira de lidar com o problema é outra.

2.2. Raciocínio combinatório: conceitos/definições

A Combinatória permite quantificar conjuntos ou subconjuntos de objetos ou de situações, selecionados a partir de um conjunto dado, ou seja, a partir de determinadas estratégias ou de determinadas fórmulas, pode-se saber quantos elementos ou quantos eventos são possíveis numa dada situação, sem necessariamente ter que contá-los um a um (Pessoa e Borba, 2009). Assim, o *raciocínio combinatório* é um tipo de pensamento que envolve contagem, mas que vai além da enumeração de elementos de um conjunto. Na Combinatória contam-se, baseando-se no raciocínio multiplicativo, grupos de possibilidades, através de uma ação sistemática, seja pelo uso de fórmula, seja pelo desenvolvimento de uma estratégia que dê conta de atender aos requisitos desses tipos de problemas, como a constituição de agrupamentos, a determinação de possibilidades e sua contagem.

2.3. Produto Cartesiano, Permutação, Arranjo, Combinação

Pessoa e Borba (2008) classificam os problemas que envolvem *raciocínio combinatório* em uma organização única: *produto cartesiano, arranjo, permutação e combinação.* A seguir estão colocados os significados presentes na Combinatória (tipos de problemas), com seus exemplos e *invariantes* (relações e propriedades que se mantêm constantes):

- Produto Cartesiano

Ex.: Para a festa de São João da escola, tem 3 meninos e 4 meninas que querem dançar quadrilha. Se todos os meninos dançarem com todas as meninas, quantos pares diferentes poderão ser formados?

Invariantes: (1) dados dois (*ou mais*) conjuntos distintos, os mesmos serão combinados para formar um novo conjunto; (2) A ordem dos elementos não gera novas possibilidades.

- Permutação

Ex.: Calcule o número de anagramas da palavra AMOR.

Invariantes: (1) todos os elementos do conjunto serão usados, cada um apenas uma vez (especificamente para os casos sem repetição); (2) a ordem dos elementos gera novas possibilidades.

- Arranjo

Ex.: O quadrangular final da Copa do Mundo será disputado pelas seguintes seleções: Brasil, França, Alemanha e Argentina. De quantas maneiras distintas podemos ter os três primeiros colocados?

Invariantes: (1) tendo **n** elementos, poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos.... **p** elementos, com $\mathbf{0} < \mathbf{p} < \mathbf{n}$, sendo **p** e **n** números naturais; (2) a ordem dos elementos gera novas possibilidades.

- Combinação

Ex.: Três alunos (Mário, Raul e Júnior) participam de um concurso em que serão sorteadas duas bicicletas diferentes. Cada menino só poderá ganhar uma bicicleta. Quantos resultados diferentes podem ser obtidos no concurso?

Invariantes: (1) tendo **n** elementos, poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos.... **p** elementos, com $0 < p < n$, **p** e **n** naturais; (2) a ordem dos elementos não gera novas possibilidades.

Os invariantes são elementos fundamentais para que se compreendam as lógicas implícitas em cada significado da Combinatória, ou seja, em cada tipo de problema combinatório.

Os problemas podem ser resolvidos por meio de diferentes formas de *representação*: desenhos, listagens, árvores de possibilidades, tabelas, fórmulas, dentre outras. As diferentes simbologias ocorrem tanto no que se refere às formas como os alunos resolvem as questões, quanto à forma como a questão é apresentada para ser resolvida.

No presente estudo foram utilizadas estratégias bem sucedidas desenvolvidas por alunos pesquisados por Pessoa e Borba (2009) e Pessoa e Santos (2011), ao resolverem problemas combinatórios, para realizar intervenções com alunos do 9º ano do Ensino Fundamental.

3. Objetivos

Experimentar com alunos do 9º ano do Ensino Fundamental intervenções baseadas em *listagem de possibilidades*, *sistematização* da listagem, explicitação dos *invariantes* e *generalização;* comparar o desempenho dos alunos, em relação à Combinatória, entre o pré-teste, as intervenções e os pós-testes.

4. Método

Foram realizadas intervenções com alunos do 9º ano do Ensino Fundamental a partir de estratégias bem sucedidas desenvolvidas por estudantes pesquisados por Pessoa e Borba (2009) e Pessoa e Santos (2011). O estudo foi constituído de pré-teste, intervenções e pós-teste, buscando-se analisar procedimentos de intervenção que auxiliam alunos no desenvolvimento do raciocínio combinatório.

O estudo foi realizado com alunos de duas turmas de 9º ano de uma escola pública, escolhidas aleatoriamente para ser uma o Grupo Experimental (GE) e outra o Grupo Controle (GC).

Após a aplicação e correção do pré-teste (realizado igualmente com os dois grupos), que indicava o nível de conhecimento que os alunos tinham sobre combinatória, foram elaboradas as intervenções.

Foram feitas duas intervenções com cada grupo. Com o GC, a intervenção constou de ensino de resolução de problemas multiplicativos de um modo geral e de problemas de raciocínio lógico. Com o GE, a intervenção constou de ensino de resolução de problemas combinatórios, com destaque para quatro tópicos: *listagem de possibilidades como estratégia, invariantes, sistematização* e *generalização.*

Nas duas sessões de intervenção com o GE foram mesclados os quatro tipos de problemas. Na primeira foram trabalhados problemas dos tipos produto cartesiano e permutação e na segunda sessão foram trabalhados problemas dos tipos combinação e arranjo. Buscou-se trabalhar problemas com números cujos resultados levem a grandezas menores (até 10) e maiores (até 30) para os alunos buscarem uma generalização – via Princípio Fundamental da Contagem ou a percepção de regularidade, por exemplo.

Trabalhou-se da seguinte forma: foi resolvido com os alunos (no quadro-negro) o primeiro problema, havendo destaque para os invariantes do mesmo. Após esse momento, pediu-se que eles respondessem, individualmente, ao segundo problema. Nesse momento, a intenção era a de que fossem retiradas as dúvidas dos alunos, podendo haver uma explicação mais individualizada àqueles que assim desejassem. Dado o tempo para que eles respondessem o problema posterior, foi feita a resolução no quadro, com participação da turma. O processo foi repetido durante a resolução do terceiro e quarto problemas. Tal modo de intervenção ocorreu de forma similar com cada um dos tipos de problemas Combinatórios, nas duas sessões.

Para caracterizar a intervenção, será tomada como exemplo uma das situações-problema trabalhadas:

Produto cartesiano - Problema: *A mãe de Pedrinho fez oito tipos de suco (maracujá, laranja, acerola, goiaba, uva, manga, abacaxi e caju) para a comemoração do dia das crianças na escola do seu filho. Ela levou copos descartáveis de quatro cores (amarelo,* *branco, cinza e preto). Quantas combinações diferentes poderão ser formadas, combinando todos os sucos com todos os copos?*

Na intervenção, chamou-se a atenção para o uso da estratégia *listagem* de possibilidades. Sobre os *invariantes*, destacou-se o fato de que existiam dois grupos (sucos – oito tipos, e copos – quatro cores) e que para formar as combinações possíveis, seria necessário retirar um elemento de cada grupo, formando assim um terceiro conjunto. Além disso, questionou-se os alunos sobre a ordem exercer ou não influência, levando-as a ratificar a ideia de que, nesse tipo de problema, formadas as combinações, a ordem não gera novas possibilidades.

Sobre a *sistematização*, sendo tal prática adotada durante a resolução de todos os tipos de problemas, em ambas as intervenções, sempre que se iniciava a resolução de um problema no quadro, era sugerido que tal escrita fosse feita de forma organizada. Para esta organização, sugeriu-se a sistematização, de modo que a ordem na qual os elementos aparecessem no enunciado fosse a mesma seguida no momento de escrever as possibilidades, o que tornava a resolução mais fácil, visto que a probabilidade de se confundir os elementos seria menor.

Para destacar a *generalização*, nesse tipo de problema especificamente, chamou-se atenção para o fato de que se para cada tipo de suco disponível havia a possibilidade de combinação com quatro cores diferentes de copos, e que existiam 8 tipos de sucos, a multiplicação 4x8 responderia ao problema.

Com o Grupo Controle, foram elaboradas intervenções baseados no ensino de problemas multiplicativos e de raciocínio lógico. A quantidade de problemas e de intervenções foram as mesmas trabalhadas com o Grupo Experimental. Mesmo não sendo a turma foco do estudo, as aulas foram ministradas de forma a ensinar de maneira consistente aos alunos, os questionando, tirando dúvidas e possibilitando a construção de conhecimentos.

Após as intervenções, foi aplicado o pós-teste que seguia a mesma natureza e quantidade de questões dos problemas do pré-teste. Foi aplicado o pós-teste com as turmas do Grupo Experimental e do Grupo Controle, quatro dias após a última sessão de intervenção.

Com os dados da coleta em mãos, foram feitas as correções de forma quantitativa, buscando perceber se houve avanço no desempenho dos alunos do pré-teste para o pós-teste. Dessa forma, buscou-se quantificar os acertos de um teste para outro e classificar os tipos de estratégias, visualizando se houve avanço e em quais tipos de problemas. Esse comparativo ainda foi realizado entre o Grupo Experimental e o Grupo Controle, buscando comprovar a eficácia das intervenções através do ensino de combinatória por estratégias bem sucedidas desenvolvidas por outros alunos, ainda no ensino Fundamental.

5. Resultados

Após as coletas de dados terem sido realizadas, os principias resultados obtidos foram analisados de forma a perceber os avanços dos alunos na quantidade de acertos entre o pré-teste e o pós-teste.

Os Quadros 1 e 2 e a Tabela 1 a seguir mostram o desempenho dos alunos do Grupo Experimental entre o Pré-teste e o pós-teste.

Quadro 1: Acertos totais por aluno do Grupo Experimental no pré-teste

ALUNOS	PROBLEMAS								TOTAL DE ACERTOS
	1º PC-	2º PC+	3º A-	4º A+	5º C-	6º C+	7º P-	8º P+	
1	X	X					X		3
2									0
3	X	X							2
4	X	X	X		X		X		5
5	X								1
6	X	X	X					X	4
7									0
8	X								1
9	X	X	X		X		X		5
10	X	X	X		X		X		5
11	X	X	X						3
12	X	X			X				3
13	X	X			X				3
14	X	X			X		X		4
15	X	X			X				3
16	X								1

Quadro 2: Acertos totais por aluno do Grupo Experimental no pós-teste

ALUNOS	PROBLEMAS								TOTAL DE ACERTOS
	1º PC-	2º PC+	3º A-	4º A+	5º C-	6º C+	7º P-	8º P+	
1	X	X	X		X		X	X	6
2							X		1
3	X				X		X		3
4	X	X	X	X	X				5
5					X		X		2
6	X	X	X				X		4
7	X	X	X	X	X		X	X	7

8	X	X			X				3
9	X	X	X		X		X	X	6
10	X	X			X		X	X	5
11	X	X	X		X		X	X	6
12	X	X		X	X			X	5
13	X	X	X		X		X	X	6
14	X	X	X		X		X		6
15	X	X	X		X		X	X	6
16	X	X			X				3

PC-=Produto Cartesiano de menor possibilidades; PC+= Produto Cartesiano de maior possibilidades; A-= Arranjo de menor possibilidades; A+= Arranjo de maior possibilidades; C-= Combinação de menor possibilidades; C+= Combinação de maior possibilidades; P-= Permutação de menor possibilidades; P+= Permutação de maior possibilidades.

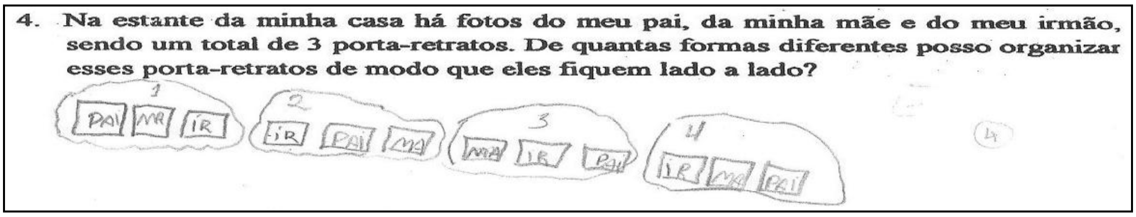
Tabela 1: Comparação do percentual de acertos entre o pré-teste e o pós-teste pelo Grupo Experimental

Testes	**PERCENTUAL DE ACERTOS POR PROBLEMAS**							
	1º PC-	2º PC+	3º A-	4º A+	5º C-	6º C+	7º P-	8º P+
Pré-teste	87,5	68,75	31,25	0	43,75	0	31,25	6,25
Pós-teste	87,5	81,5	56,25	18,75	87,5	0	75	50

Visualizando os Quadros 1 e 2, é possível perceber que os alunos no Pré-teste apresentaram um maior número de acertos nos problemas de produto cartesiano, seguido dos de combinação que levavam a números com menos possibilidades. Entretanto no que diz respeito aos outros tipos de problemas, percebe-se um quantitativo muito baixo de acertos. Além disso, percebe-se que no pré-teste a quantidade de acertos foi bastante inferior ao do pós-teste.

No estudo de Pessoa e Santos (2011) o problema de combinação foi apresentado como o de mais fácil resolução pelas crianças, seguido dos problemas de produto cartesiano, permutação e arranjo. No estudo atual, realizado com adolescentes, são percebidas semelhanças quanto aos problemas de maior dificuldade, porém, no presente estudo os de Produto Cartesiano foram de mais fácil resolução que os de Combinação. Tal fato pode ser justificado por se tratar de uma turma de 9º ano do Ensino Fundamental e ser um tipo de problema multiplicativo geralmente trabalhado desde os anos iniciais, sendo menos trabalhadas as características e singularidades dos outros tipos de problemas combinatórios.

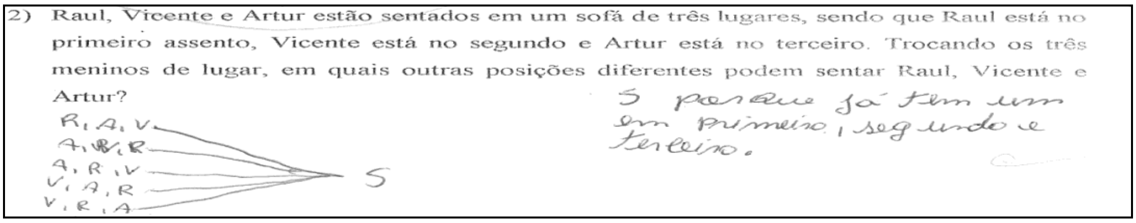
Com os resultados do pós-teste, realizado após as intervenções, foram percebidos avanços importantes na quantidade de acertos, por tipo de problema e por cada aluno individualmente. Os problemas de permutação, que apresentaram um quantitativo baixo de acerto no pré-teste, no pós-teste ganharam destaque, apresentando os maiores avanços, tanto nos problemas que levavam a resultados com menores possibilidades quanto nos que levavam a um maior número de possibilidades. Foi possível perceber que além do acréscimo no número de acertos, os alunos que obtiveram êxito nas respostas, utilizaram estratégias mais elaboradas na resolução dos problemas. Como exemplo, apresentamos o Aluno 13.



4. Na estante da minha casa há fotos do meu pai, da minha mãe e do meu irmão, sendo um total de 3 porta-retratos. De quantas formas diferentes posso organizar esses porta-retratos de modo que eles fiquem lado a lado?

1 PAI MA IR
2 IR PAI MA
3 MA IR PAI
4 IR MA PAI
4

Figura 1. Solução do Aluno 13 para o problema de permutação com número menor de possibilidades no pré-teste, com resposta incorreta com listagem não sistemática



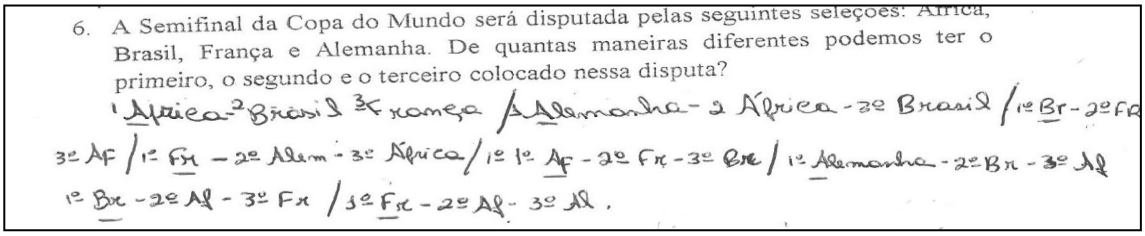
2) Raul, Vicente e Artur estão sentados em um sofá de três lugares, sendo que Raul está no primeiro assento, Vicente está no segundo e Artur está no terceiro. Trocando os três meninos de lugar, em quais outras posições diferentes podem sentar Raul, Vicente e Artur?

R, A, V
A, V, R
A, R, V
V, A, R
V, R, A
5

5 porque já tem um em primeiro, segundo e terceiro.

Figura 2. Solução do Aluno 13 para o problema de permutação com número menor de possibilidades no pós-teste, com resposta correta com listagem sistemática

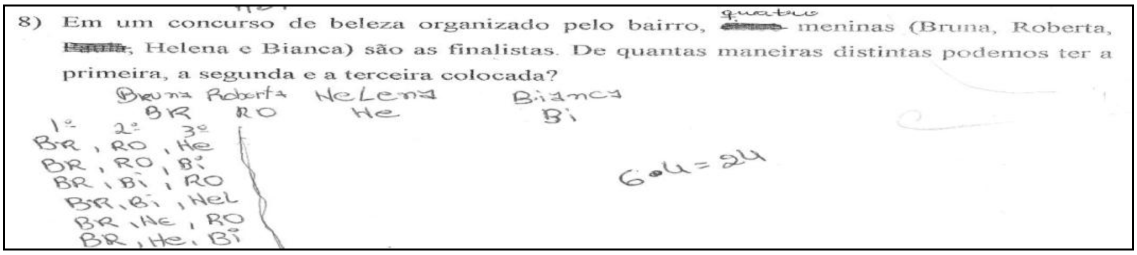
Outro aspecto significativo foi a percepção das regularidades dos problemas e a chegada à generalização por alguns alunos, como no exemplo a seguir do Aluno 4.



6. A Semifinal da Copa do Mundo será disputada pelas seguintes seleções: África, Brasil, França e Alemanha. De quantas maneiras diferentes podemos ter o primeiro, o segundo e o terceiro colocado nessa disputa?

1 África 2 Brasil 3 França / 1 Alemanha - 2 África - 3º Brasil / 1º Br - 2º Fr 3º Af / 1º Fr - 2º Alem - 3º África / 1º 1º Af - 2º Fr - 3º Bra / 1º Alemanha - 2º Br - 3º Al 1º Br - 2º Al - 3º Fr / 1º Fr - 2º Al - 3º Al.

Figura 3. Solução do Aluno 4 para o problema de arranjo com número maior de possibilidades no pré-teste.


8) Em um concurso de beleza organizado pelo bairro, [redacted] quatro meninas (Bruna, Roberta, [redacted], Helena e Bianca) são as finalistas. De quantas maneiras distintas podemos ter a primeira, a segunda e a terceira colocada?

Bruna Roberta HeLena Bianca
BR RO He Bi
1º 2º 3º
BR, RO, He
BR, RO, Bi
BR, Bi, RO
BR, Bi, HeL
BR, He, RO
BR, He, Bi

6·4=24

Figura 4. Solução do Aluno 4 para o problema de arranjo com número maior de possibilidades no pós-teste.

Individualmente, todos os alunos apresentaram melhor desempenho após as intervenções, seja no quantitativo de acertos ou na qualidade das estratégias apresentadas. Como exemplo, podem-se apontar os avanços do aluno 7 no Quadro 3, a seguir:

Quadro 3: Desempenho do aluno 7 entre o pré-teste e Pós-teste

Testes	PROBLEMAS								TOTAL DE ACERTOS
	1º PC-	2º PC+	3º A-	4º A+	5º C-	6º C+	7º P-	8º P+	
Pré-teste									0
Pós-teste	X	X	X	X	X		X	X	7

O aluno 7, que no pré-teste apresentou baixo desempenho, não conseguindo acertar nenhum dos problemas, no pós-teste apresentou aproveitamento de 87,5%, deixando de acertar apenas o problema de Combinação que levava a um maior número de possibilidades.

É possível perceber que mesmo após as intervenções, os alunos apresentam dificuldades quanto à resolução dos problemas de Combinação com maior número de possibilidades, no qual a maioria ainda não conseguia sistematizar de forma regular até chegar ao esgotamento de possibilidades, mesmo listando diversas delas.

Por outro lado, os alunos do Grupo Controle, como mostra a tabela a seguir, não apresentam grandes avanços com relação ao quantitativo de acerto entre o pré-teste e pós-teste.

Tabela 2: Comparação do percentual de acertos entre o pré-teste e o pós-teste pelo Grupo Controle

Testes	PERCENTUAL DE ACERTOS POR PROBLEMAS							
	1º PC-	2º PC+	3º A-	4º A+	5º C-	6º C+	7º P-	8º P+

Pré-teste	100	61,53	27,07	0	30,76	0	7,69	0
Pós-teste	61,53	61,53	30,76	0	23,07	0	15,38	0

É possível perceber que os resultados entre os testes não apresentam avanços quanto aos acertos por tipo de problema, exceto os de permutação com menor número de possibilidades, que pode se justificar pelas intervenções terem sido sobre problemas multiplicativos, e alguns alunos optarem pela resolução dos problemas através deste cálculo, coincidindo com a resposta.

Tal avanço no quantitativo geral de acertos e na amplitude por tipo de problemas referentes aos alunos do Grupo Experimental reforça a eficácia das intervenções, pois durante as mesmas foi adotada a metodologia de trabalhar as singularidades de cada problema, com seus invariantes e significados, chamando-se a atenção para a *listagem de possibilidades* enquanto estratégia, para a *sistematização* da listagem, para os *invariantes* do significado de combinatória do problema trabalhado e para a *generalização.*

Desta forma, percebendo a características de cada tipo de problema e sabendo a estratégia adequada para a resolução, os alunos, na sua maioria, apresentaram êxito em todos os tipos de problema combinatórios.

3. Considerações finais

Diante do que foi observado, pode-se concluir que os alunos, a partir das intervenções realizadas, conseguiram alcançar um avanço significativo quanto ao desenvolvimento do raciocínio combinatório, apresentando aumentos importantes no quantitativo de acertos de questões entre os testes, assim como na qualidade das respostas, explicitando a compreensão que os mesmos apresentam dos problemas.

Foi possível perceber que através do ensino enfatizando a *listagem* como estratégia, a *sistematização* da listagem, o enfoque nas propriedades *invariantes* de cada significado de problema e a *generalização*, os alunos conseguiram compreender com maior facilidade o significado das questões, apresentando resoluções que apontam essa compreensão para todos os tipos de problemas, utilizando as estratégias trabalhadas nas intervenções e obtendo êxito nas respostas.

O uso da *sistematização* aponta nos resultados, como sendo o caminho de melhor facilidade pelos alunos de se chegar ao resultado dos problemas, pois ainda que apresentando compreensão dos mesmos, alguns alunos demonstravam no pré-teste dificuldade em esgotar as possibilidades que cada problema exigia. Compreendendo os invariantes de cada problema, os alunos puderam perceber quais possibilidades poderiam combinar e com o auxílio da listagem, enumerá-las de forma a chegar ao resultado correto sem ultrapassar ou esquecer todas as possibilidades.

Intervir com os alunos de forma a trabalhar as características de cada problema, demonstra, neste estudo, ser de extrema importância, pois compreendendo os invariantes, elementos fundamentais para que se compreendam as lógicas implícitas em cada significado da combinatória, os mesmos busquem a resolução correta, utilizando a estratégia adequada, esgotando todas as possibilidades, podendo perceber sua regularidades e chegando à generalização.

Fica claro, que mesmo não sendo o ano escolar no qual a combinatória é trabalhada regularmente com os alunos, apresentar desde cedo esse conteúdo, ensinando a partir de estratégias, e não logo introduzindo fórmulas (embora estas sejam importantes em determinadas situações, como, por exemplo, para se resolver problemas cujos resultados são números de valores altos, mas podem ser vistas em anos escolares mais avançados), os alunos têm a capacidade de aprender de forma consistente este conhecimento tão importante para a sua formação.

Dessa forma, espera-se que se tenha alcançado, no presente estudo, o objetivo de contribuir para o ensino da combinatória ainda no Ensino Fundamental, a partir de uma perspectiva de intervenções baseadas em estratégias.

7. Referências

BRASIL, MEC. **Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática**. 1º e 2º ciclos. Brasília: Secretaria de Ensino Fundamental, 1997.

BRASIL, MEC. **Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática**. 3º e 4º ciclos. Secretaria de Ensino Fundamental, Brasília, 1998.

PESSOA, Cristiane. & BORBA, Rute. Como crianças de 1ª à 4ª série resolvem problemas de raciocínio combinatório? **Anais do 2º Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática.** Recife, 2008.

PESSOA, Cristiane. & BORBA, Rute. . Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1a a 4a série. **Zetetike** (UNICAMP), v. 17, p. 105-150, 2009.

PESSOA, Cristiane. & SANTOS, Laís Thalita Bezerra dos. O que fazem alunos do 5º ano de escolarização básica diante de situações combinatórias? **Anais da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática.** Recife, 2011.

VERGNAUD, Gérard. La théorie de champs conceptuels. **Recherches en Didactique de Mathématiques,** , vol 10, n°2.3, Pensée Sauvage: Grenoble, França. 1990, pp. 133-170.

VERGNAUD, Gérard. El niño, las matemáticas y la realidad - Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. Mexico: Trillas, 1991.